EXERCICES MOUVEMENT DANS UN CHAMP DE PESANTEUR

Exercice 1. Fusée de détresse (45 minutes)

Lors de fouilles préventives sur un chantier de travaux publics, on a retrouvé ce qui ressemble à une arme à feu. Il s'agit d'un ancien pistolet lance-fusées en bronze datant probablement de la première Guerre Mondiale. Il est dans un état de conservation assez remarquable.

Ce type de pistolet était très utilisé lors de cette guerre car, en plus de lancer des fusées éclairantes, il pouvait servir de moyen de communication. En effet, à l'époque très peu de moyens étaient mis à disposition des troupes : les ondes hertziennes étaient très peu utilisées et c'étaient des kilomètres de câbles téléphoniques qui devaient être déroulés pour permettre la transmission de messages divers et variés.
Ainsi les pistolets signaleurs se sont avérés très utiles.

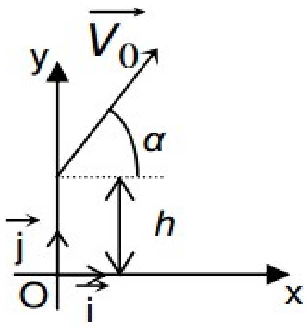
Partie 1 . Mouvement de la fusée (mouvement dans un champ)

Sur la notice des fusées éclairantes que l'on peut utiliser dans ce type de pistolet, on trouve les informations suivantes :

- Cartouche qui lance une fusée éclairante s'allumant 1,0 seconde après son départ du pistolet et éclaire d'une façon intense pendant 6 secondes environ.
- Masse de la fusée éclairante : m_f = 58 g.

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Le champ de pesanteur terrestre est considéré uniforme, de valeur g = 9,8 m.s^{-2}.
On négligera toutes les actions dues à l'air ainsi que la perte de masse de la fusée pendant qu'elle brille et on considérera cette dernière comme un objet ponctuel.
On définit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, avec O au niveau du sol et tel que la position initiale de la fusée éclairante à la sortie du pistolet soit à une hauteur h = 1,8 m. Le vecteur vitesse initiale est dans le plan (O, x, y) ; Ox est horizontal et Oy est vertical et orienté vers le haut.

À l'instant t = 0 s, le vecteur vitesse de la fusée éclairante fait un angle α égal à 55 ° avec l'axe Ox et sa valeur est v_0 = 50 m.s^{-1}. On pourra se référer au schéma ci-contre.



1.1 . Recopier la figure ci-contre sur votre copie, sur le schéma ajouter la représentation du vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ et tracer qualitativement l'allure de la trajectoire suivie par la fusée éclairante dans ce champ de pesanteur.

1.2 . En utilisant une loi de Newton que l'on énoncera, déterminer les coordonnées du vecteur accélération de la fusée éclairante : a_x(t) suivant x et a_y(t) suivant y.

1.3 . En déduire les expressions des coordonnées v_x(t)et v_y(t) du vecteur vitesse de la fusée éclairante et montrer que les équations horaires du mouvement de la fusée s'écrivent

$x(t) = v_0.\cos(\alpha).t$ et

$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0.\sin(\alpha).t + h$ avec t en seconde, v_0 en mètre par seconde et x(t), y(t) et h en mètre.

Partie 2 . Durée de visibilité de la fusée (mouvement dans un champ)

2.1 . Déterminer la valeur de la durée du vol de la fusée éclairante.

On rappelle qu'une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ *si $\Delta = b^2 - 4a.c$ est positif.*

2.2 . Calculer l'altitude à partir de laquelle la fusée commence à éclairer puis l'altitude à laquelle elle s'arrête. Ces valeurs paraissent-elles adaptées au but recherché ?

Exercice 2. EXERCICE : LE RUGBY, SPORT DE CONTACT ET D'ÉVITEMENT (1H)

Le rugby est un sport d'équipe qui s'est développé dans les pays anglo-saxons à la fin du XIX^{ème} siècle. Pour simplifier l'étude, les joueurs et le ballon seront supposés ponctuels.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

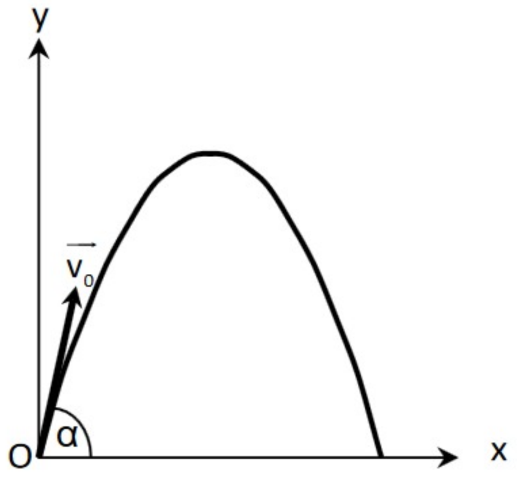
Partie 1 . Le rugby, sport d'évitement. (mouvement dans un champ)

> **Document 2 :** La chandelle
> Au rugby, une « chandelle » désigne un coup de pied permettant d'envoyer le ballon en hauteur par-dessus la ligne de défense adverse. L'objectif pour l'auteur de cette action est d'être au point de chute pour récupérer le ballon derrière le rideau défensif.

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Le champ de pesanteur terrestre est considéré uniforme, de valeur g = 9,81 N.kg^{-1}.
On négligera toutes les actions dues à l'air.
Le joueur A est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vecteur vitesse $\vec{V}_1$.
Afin d'éviter un plaquage, il réalise une chandelle au-dessus de son adversaire.
On définit un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:

- origine : position initiale du ballon ;
- vecteur unitaire $\vec{i}$ de même direction et de même sens que $\vec{V}_1$;
- vecteur unitaire $\vec{j}$ vertical et vers le haut.

À l'instant t = 0 s, le vecteur vitesse du ballon fait un angle α égal à 60° avec l'axe Ox et sa valeur est v_0 = 10,0 m.s^{-1}.
Le graphique ci-contre représente la trajectoire du ballon dans le repère choisi.



1.1 . Établir les coordonnées a_x et a_y du vecteur accélération du point M représentant le ballon.

1.2 . Montrer que les équations horaires du mouvement du point M sont :

$$x(t) = (v_0 \,.\, \cos\alpha).t \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + (v_0.\, \sin\alpha).t$$

1.3 . En déduire l'équation de la trajectoire du point M :

$$y(x) = -\frac{g}{2(v_0.\cos\alpha)^2}.x^2 + (\tan\alpha).x$$

Partie 2 . Une « chandelle » réussie (cinématique)

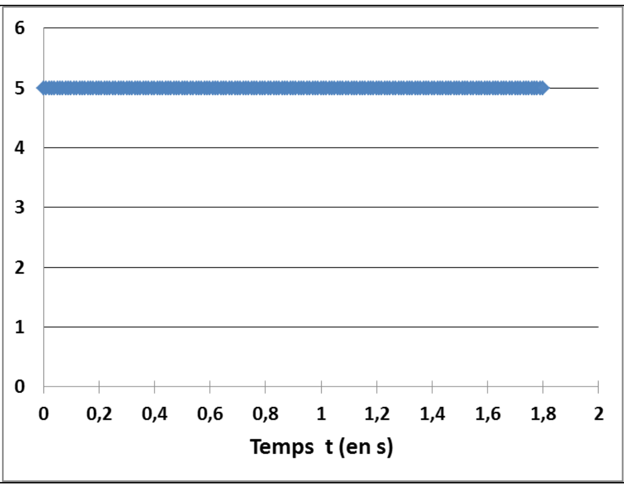
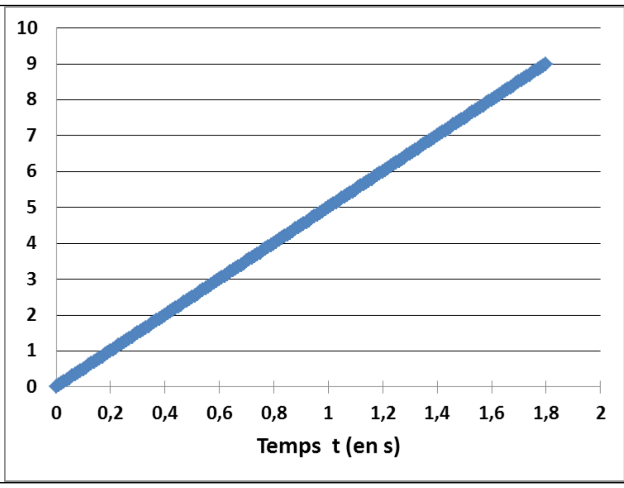
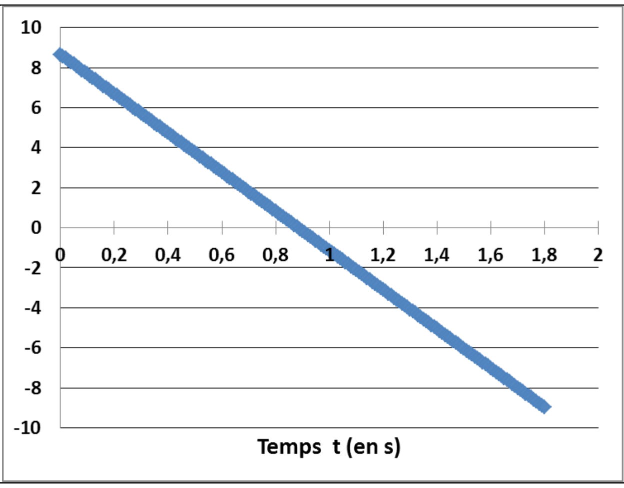
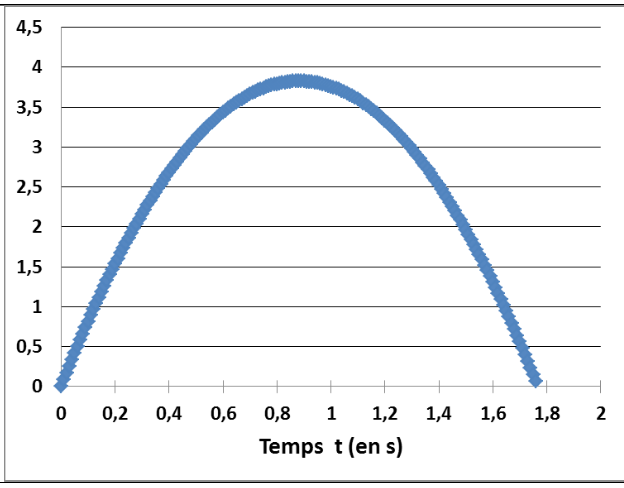
2.1 . Le tableau des courbes ci-dessous rassemble les représentations graphiques de l'évolution dans le temps
des grandeurs x, y, v_x et v_y, coordonnées des vecteurs position et vitesse du point M.
Pour chaque courbe, donner courbe l'expression de la grandeur qui lui correspond et justifier.

2.2 . Déterminer par le calcul le temps dont dispose le joueur pour récupérer le ballon avant que celui-ci ne touche le sol.

2.3 . Vérifier la valeur obtenue en faisant clairement apparaître la réponse sur l'un des graphes du tableau des courbes.

2.4 . Déterminer de deux manières différentes la valeur de la vitesse v_1 du joueur pour que la chandelle soit réussie.

Tableau des courbes

	
Courbe 1	**Courbe 2**
	
Courbe 3	**Courbe 4**

CORRECTION

Exercice 1. FUSÉE DE DÉTRESSE

Partie 1 . <u>mouvement de la fusée</u>

1.1 .

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m.\vec{a}$$

1.2 .

$$\vec{P} = m.\vec{a}$$

$$\cancel{m}.\vec{g} = \cancel{m}.\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

1.3 . $\vec{a_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \xrightarrow{primitive} \vec{v}\begin{pmatrix} v_x(t) = C_1 \\ v_Z(t) = -gt + C_2 \end{pmatrix}$

Conditions initiales À t = 0, $\vec{v}(t=0) = \vec{v_O}$ avec $\vec{v_0}\begin{pmatrix} v_0.\cos\alpha \\ v_0.\sin\alpha \end{pmatrix}$

Donc en égalant les coordonnées des deux vecteurs, il vient $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x(t) = C_1 \\ v_Z(t) = -g \times 0 + C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0.\cos\alpha \\ v_0.\sin\alpha \end{pmatrix}$, donc

$C_1 = v_{0.}\cos\alpha$ et $C_2 = v_0.\sin\alpha$

Remplacement: $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x(t) = v_0.\cos\alpha \\ v_Z(t) = -gt + v_0.\sin\alpha \end{pmatrix}$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x(t) = v_0.\cos\alpha \\ v_Z(t) = -gt + v_0.\sin\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{primitive} \overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = v_0.\cos\alpha.t + C_3 \\ z(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + v_0.\sin\alpha.t + C_4 \end{pmatrix}$$

Conditions initiales, à t = 0, $\overrightarrow{OG_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$ donc en égalant les coordonnées des deux vecteurs

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = v_0.\cos\alpha.0 + C_3 \\ z(t) = \frac{-1}{2}g\,0^2 + v_0.\sin\alpha.0 + C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} C_3 = 0 \\ C_4 = h \end{pmatrix}$$

remplacement : $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = v_0.\cos\alpha.t \\ y(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + v_0.\sin\alpha.t + h \end{pmatrix}$

Partie 2 . <u>Durée de visibilité de la fusée</u>

2.1 . On détermine la durée de vol en résolvant l'équation y(t)=0.

$$\frac{-1}{2}gt^2 + v_0.\sin\alpha.t + h = 0$$

$$\frac{-1}{2}9{,}8t^2 + 50.\sin 55.t + 1{,}8 = 0$$

On rentre les valeurs tel quelle dans la calculatrice et on obtient t_1=-0,044 s et t_2=8,4s. On choisit t_2, car la date est forcément positive.

2.2 . On remplace dans l'équation de y(t) le temps par 1 seconde et 7 secondes. On obtient alors : y(t=1)=38m et y(t=7)=48m

Les valeurs sont cohérentes, car la durée brille très longtemps et elle ne s'allume pas trop près du naufragé.

Exercice 2. LE RUGBY, SPORT DE CONTACT ET D'ÉVITEMENT

Partie 1 . Le rugby, sport d'évitement

1.1 .

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m.\vec{a}$$
$$\vec{P} = m.\vec{a}$$
$$\cancel{m}.\vec{g} = \cancel{m}.\vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

1.2 . $\vec{a_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \xrightarrow{primitive} \vec{v}\begin{pmatrix} v_x(t) = C_1 \\ v_Z(t) = -gt + C_2 \end{pmatrix}$

Conditions initiales À t = 0, $\vec{v}(t=0) = \vec{v_O}$ avec $\vec{v_0}\begin{pmatrix} v_0.\cos\alpha \\ v_0.\sin\alpha \end{pmatrix}$

Donc en égalant les coordonnées des deux vecteurs, il vient $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x(t) = C_1 \\ v_Z(t) = -g \times 0 + C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0.\cos\alpha \\ v_0.\sin\alpha \end{pmatrix}$, donc

$C_1 = v_{0.}\cos\alpha$ et $C_2 = v_0.\sin\alpha$

remplacement: $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x(t) = v_0.\cos\alpha \\ v_Z(t) = -gt + v_0.\sin\alpha \end{pmatrix}$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x(t) = v_0.\cos\alpha \\ v_Z(t) = -gt + v_0.\sin\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{primitive} \overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = v_0.\cos\alpha.t + C_3 \\ z(t) = \dfrac{-1}{2}gt^2 + v_0.\sin\alpha.t + C_4 \end{pmatrix}$$

Conditions initiales, à t = 0, $\overrightarrow{OG_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc en égalant les coordonnées des deux vecteurs

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = v_0.\cos\alpha.0 + C_3 \\ z(t) = \dfrac{-1}{2}g\,0^2 + v_0.\sin\alpha.0 + C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{pmatrix}$$

remplacement : $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = v_0.\cos\alpha.t \\ y(t) = \dfrac{-1}{2}gt^2 + v_0.\sin\alpha.t \end{pmatrix}$

1.3 . Pour obtenir l'équation de la trajectoire $z(x)$ du ballon, on isole le temps t de $x(t)$ et on reporte l'expression de t dans $z(t)$:

$x = v_0.cos\ .t$ donc $t = \dfrac{x}{v_0.cos\alpha}$ et $z(t) = \dfrac{-1}{2}g\left(\dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}\right)^2 + v_0.\sin\alpha.\dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}$

Finalement : $z(x) = -\dfrac{g.x^2}{2.v_0^2.(\cos\alpha)^2} + \tan\alpha.x$

Partie 2 . Une « chandelle » réussie

2.1 . courbe 4 est l'équation d'une parabole donc y(t)
courbe 1 est une équation constante donc $v_x(t)$
courbe 2 est une équation d'une fonction affine passant par l'origine donc x(t)
courbe 3 est une équation d'une fonction affine à coefficient directeur négatif donc $v_X(t)$.

2.2 . Le ballon touchera le sol lorsque y(t)=0,

$$\frac{-1}{2}gt^2 + v_0.\sin\alpha.t + h = 0$$
$$\frac{-1}{2}9{,}8t^2 + 10.\sin 60.t = 0 \quad \text{donc}$$
$$t\left(\frac{-1}{2}9{,}8t + 10.\sin 60\right) = 0$$

$$\frac{-1}{2} \times 9{,}8t + 10.\sin 60 = 0$$
$$10.\sin 60 = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times t$$
$$2 \times 10.\sin 60 = 9{,}8 \times t$$
$$\frac{2 \times 10.\sin 60}{9{,}8} = t$$
$$t = 1{,}8\,s$$

On peut également rentrer les valeurs tel quelle dans la calculatrice et on obtient t_1=0 s et t_2=1,8 s. On choisit t_2, car la date est forcément positive.

2.3 . Le ballon touchera le sol lorsque y(t)=0. Sur la courbe 4, on lit la valeur correspondante de t=1,8 s.
2.4 . le coureur doit aller aussi vite que le ballon avance horizontalement, donc à v_x=5 m.s^{-1}.

On calcule la vitesse en faisant la formule $v=\frac{d}{\Delta t}=\frac{9}{1,8}=5 m.s^{-1}$.

La valeur de d est obtenue par la courbe 2 ; en reportant la valeur de 1,8 s, on trouve d=9 m.