

EXERCICE 2 (5 points)

Autour de Saturne

La planète Saturne, connue pour ses anneaux, compte pas moins de 80 satellites naturels ou « lunes ».

La plus grande de ces lunes, Titan, n'est pas visible à l'œil nu. Elle a été découverte en 1655 par Christian Huyghens (1629-1695) grâce à une lunette astronomique de sa conception.

L'une des lunes les plus proches de Saturne est Janus, découverte en 1966 par plusieurs astronomes dont le français Audouin Dollfus (1924-2010).

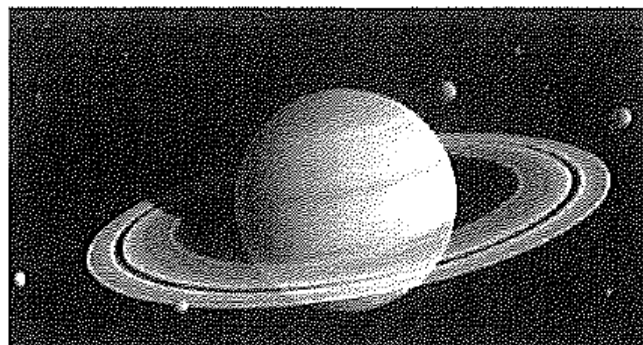


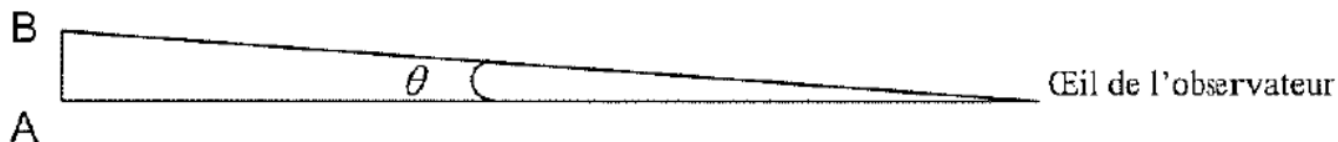
Illustration tirée de : starwalk.space/fr

Cet exercice a plusieurs objectifs : justifier l'utilisation d'une lunette astronomique pour observer Titan (parties A et B), puis étudier le mouvement de Janus (partie C).

Données :

- Diamètre apparent d'un objet et pouvoir séparateur de l'œil, figure 1

Le diamètre apparent d'un objet, noté θ , est l'angle sous lequel un objet AB est vu par un observateur (Cf. figure)



Le pouvoir séparateur de l'œil, noté ϵ , est la valeur minimale de l'angle θ sous lequel les deux points A et B peuvent être vus séparément. Pour l'œil humain, $\epsilon = 3 \times 10^{-4}$ rad.

FIG. 1 : Diamètre apparent d'un objet et pouvoir séparateur

- Distance moyenne Titan – Terre : $D = 1,43 \times 10^9$ km
- Diamètre de Titan : $d = 5,2 \times 10^3$ km
- Angle sous lequel est vue la lune Janus depuis la Terre : $\theta_J = 1,3 \times 10^{-7}$ rad
- Dans tout l'exercice, les angles sont suffisamment petits pour que l'on puisse faire l'approximation : $\tan \theta \simeq \theta$, avec θ en radian.

Partie A – Observation de Titan à l'œil nu.

Q1. Montrer que l'angle θ sous lequel se présente Titan depuis la Terre vaut approximativement $3,6 \times 10^{-6}$ rad.

Q2. Justifier que Titan n'est pas observable à l'œil nu.

Partie B – Observation de Titan à l'aide d'une lunette astronomique.

Une élève se rend à l'Observatoire historique de Marseille pour observer Saturne et ses satellites. Elle fait ses observations à l'aide d'une lunette astronomique dont les caractéristiques sont données ci-dessous.

- Objectif : Distance focale : $f'_{obj} = 3,10 \text{ m}$
- Diamètre : $d_{obj} = 260 \text{ mm}$
- Pour l'oculaire, trois distances focales f'_{ocu} sont possibles : 12 mm, 25 mm, 40 mm.

Le schéma de principe modélisant cette lunette est présenté en **ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE**. L'objet $A_\infty B_\infty$ observé est situé à l'infini, il est perpendiculaire à l'axe optique ; le point A_∞ est sur l'axe optique. Seuls quelques rayons issus de B_∞ sont représentés. Les angles ne sont pas à l'échelle. On rappelle qu'un système optique est dit « afocal » s'il donne d'un objet à l'infini une image à l'infini.

- Q3.** Identifier l'objectif et l'oculaire sur le schéma en **ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE** et positionner les foyers F_2 et F'_2 de la lentille L_2 pour obtenir une lunette afocale. Justifier sur votre copie.
- Q4.** Construire sur le schéma en **ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE** la marche complète des rayons lumineux incidents issus d'un point objet B_∞ situé à l'infini, en faisant apparaître l'image intermédiaire $A_1 B_1$ donnée par la lentille L_1 .

Le grossissement G_L de la lunette a pour expression : $G_L = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f'_{obj}}{f'_{ocu}}$ où l'angle θ' représente l'angle sous lequel est vu Titan à travers la lunette astronomique.

- Q5.** Parmi les différents oculaires disponibles, indiquer, en justifiant celui qui permet d'obtenir le grossissement maximal.
- Q6.** Déterminer s'il est possible d'observer Titan à l'aide de cette lunette.

Partie C – Autour de Saturne.

Les lunes en orbite autour de Saturne, obéissent aux lois du mouvement d'un satellite dans un champ de gravitation.

Données :

- Rayon de l'orbite de Janus : $r = 1,51 \times 10^5 \text{ km}$
- Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

La vitesse v , constante, d'un satellite de masse m en orbite circulaire autour de Saturne est donnée par la relation :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}} \quad (\text{relation 1})$$

où r est le rayon constant de l'orbite du satellite et M_S la masse de Saturne.

- Q7.** Retrouver la relation 1 en utilisant une loi de Newton.
- Q8.** Montrer que l'expression de la vitesse du satellite permet de retrouver la troisième de Képler qui relie la période T du satellite au rayon r de son orbite : $T^2 = k \times r^3$ avec $k = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$.
- Q9.** Déterminer la masse de Saturne sachant que la période de révolution de Janus est de 17 h.

EXERCICE 3 (6 points)

MODÉLISATION D'UN DÉTECTEUR CAPACITIF D'HUMIDITÉ

Correctement calibré, un système d'arrosage automatique de végétaux permet un arrosage homogène, à un moment opportun et sans gaspillage d'eau. À cet effet, il peut être déclenché grâce à l'utilisation d'un détecteur capacitif d'humidité du sol.

L'objectif de cet exercice est d'étudier une modélisation simple d'un détecteur capacitif d'humidité puis de l'utiliser pour illustrer le principe d'une mesure de la teneur en eau d'un sol.

Données :

- dans cet exercice, le détecteur capacitif d'humidité est modélisé par un condensateur plan dont la capacité C varie en fonction de l'humidité du sol ;
- le condensateur est constitué de deux plaques (ou armatures) métalliques de surface S séparées d'une distance d plantées dans un sol de permittivité ϵ :

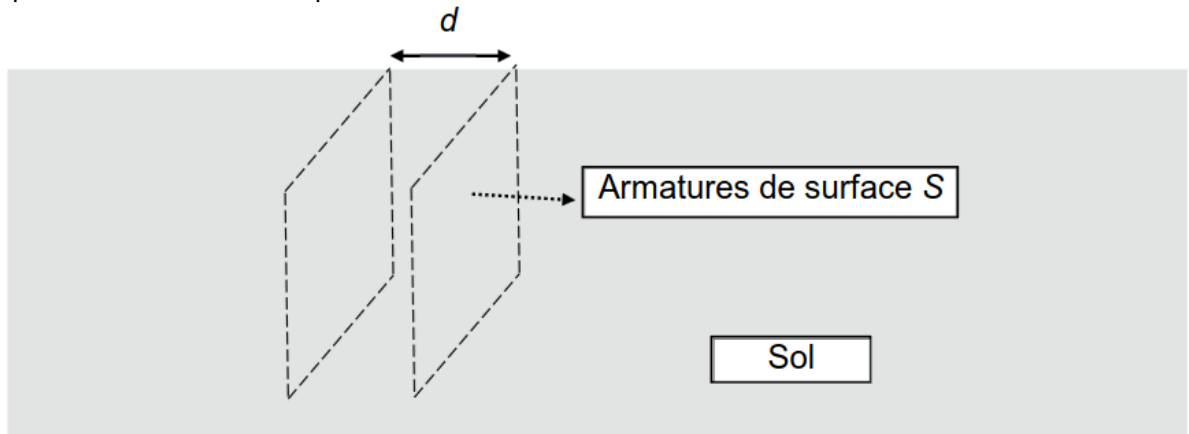
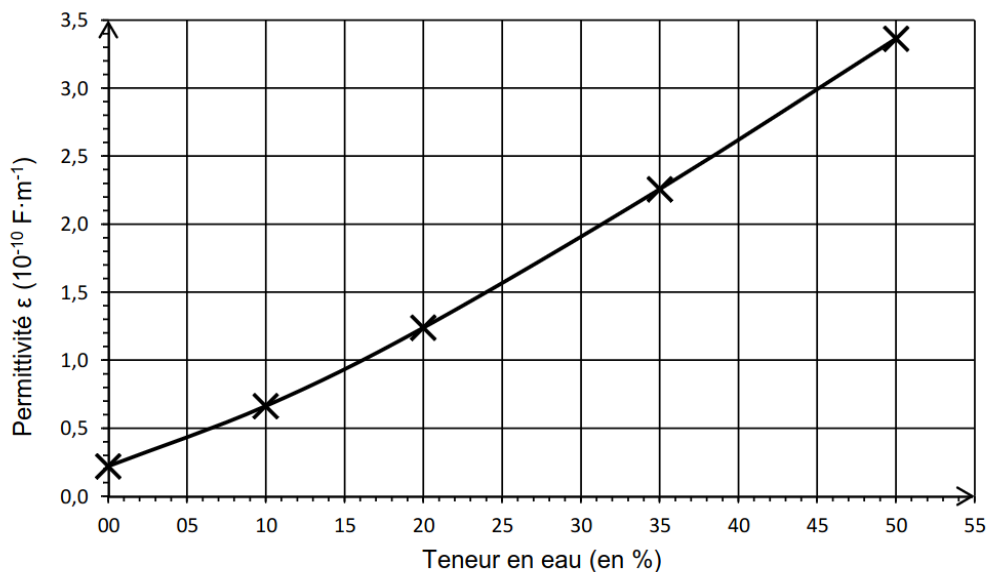


FIG. 1 : Schéma simplifié du condensateur d'un détecteur d'humidité

- la capacité C (en farad F) du condensateur s'exprime en fonction de la surface S (en m^2) de ses armatures, de la distance d (en m) qui les sépare et d'un paramètre caractéristique du sol appelé permittivité ϵ (en $F \cdot m^{-1}$) du sol par la relation : $C = \frac{\epsilon \cdot S}{d}$
- on appelle « teneur en eau » le pourcentage volumique d'eau dans le sol ;
- on présente la courbe de la permittivité ϵ d'un sol argileux en fonction de sa teneur en eau :



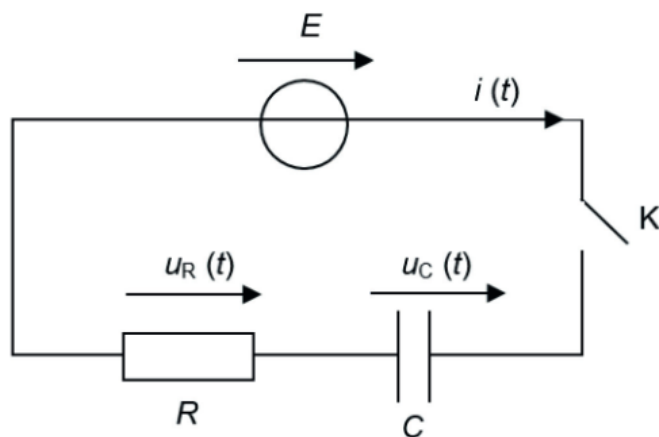
D'après www.hal.laas.fr

FIG. 2 : Permittivité du sol en fonction de la teneur en eau du sol

Partie 1 - Modélisation de la charge du condensateur

- Q1.** Prévoir qualitativement le sens de variation de la capacité C du détecteur capacitif d'humidité quand la teneur en eau d'un sol argileux augmente.

Le condensateur de capacité C , modélisant le détecteur, est branché en série avec un générateur délivrant une tension constante E , un interrupteur K et un conducteur ohmique de résistance R . Le circuit ainsi constitué est modélisé par un circuit de type RC représenté ci-dessous :



À la date $t = 0$ s, le condensateur est déchargé et on ferme l'interrupteur. On souhaite établir l'expression de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

- Q2.** Montrer que la tension aux bornes du condensateur obéit à l'équation différentielle ci-dessous. Exprimer littéralement le temps caractéristique τ du circuit en fonction de R et de C .

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

- Q3.** Vérifier que la fonction $u_C(t) = E(1 - e^{(-\frac{t}{\tau})})$ est solution de cette équation différentielle et qu'elle satisfait à la condition imposée à la date $t = 0$ s.
- Q4.** Montrer que la valeur de u_C à l'instant τ est approximativement égale à : $u_C(\tau) = 0,63 \times E$.
- Q5.** Déterminer graphiquement la valeur de τ . Faire apparaître soigneusement les traits de construction utiles sur le graphe de l' **ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE**

Partie 2 - Modélisation de la mesure de la teneur en eau d'un sol argileux

La mesure du temps caractéristique du circuit RC permet d'accéder à la valeur de la teneur en eau du sol. Cette mesure est réalisée à l'aide d'un microcontrôleur connecté au circuit RC décrit ci-dessus. Il permet entre autres :

- de commander des alternances charge – décharge du condensateur ;
- de mesurer la tension aux bornes du condensateur ;
- d'afficher, après calcul, la valeur de la teneur en eau.

Pour déterminer le temps caractéristique du circuit RC , on enregistre l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur à l'aide du microcontrôleur ; celui-ci relève 52 000 valeurs de la tension par seconde.

Pour que la mesure soit suffisamment précise, on doit disposer d'au moins 10 valeurs de tension aux bornes du condensateur avant d'atteindre le temps caractéristique du circuit RC .

Q6. Montrer que le temps caractéristique τ du circuit RC doit être au minimum de l'ordre de $200 \mu s$.

Le condensateur possède les caractéristiques géométriques suivantes : $S = 1,0 \times 10^{-1} m^2$ et $d = 1,0 \times 10^{-2} m$.
La valeur de la résistance R du circuit est $R = 2,2 \times 10^5 \Omega$.

Q7. À l'aide de la contrainte sur le temps caractéristique τ du circuit RC , déterminer la teneur minimale en eau d'un sol argileux qu'il est possible de mesurer avec ce dispositif.

*Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti.
La démarche est évaluée et doit être correctement présentée.*

Le microcontrôleur réalise un traitement automatique des données s'appuyant sur un programme, écrit en langage Python, dont une partie est donnée ci-dessous :

```
1 # Arrosage automatique pour un sol argileux
2 E = 5.0
3 tension = 0                                # définition de la tension aux bornes du condensateur
4 t_i = time.time()                          # définition de l'instant initial

5 while tension <            # boucle et condition
6 float tension = analogRead(A0) * (5.0 / 1023.0) # transforme la mesure du microcontrôleur en tension

7 t_f = time.time()                          # mesure de l'instant final
8 tau = t_f - t_i
9 print("valeur de tau en ms :", tau)        # affichage d'une valeur sur l'écran
```

La commande « while » associée à une condition permet de créer une boucle qui répète la liste d'instructions qui suit, tant que la condition est satisfaite.

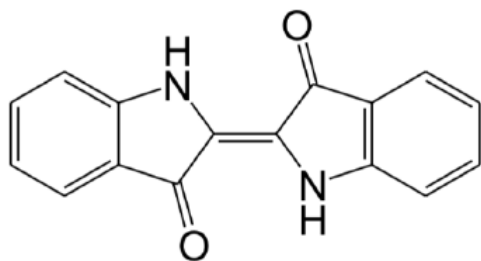
Q8. Indiquer l'objectif final de cet extrait de programme.

Q9. Recopier la ligne 5 du programme sur la copie et compléter la condition sur la valeur de la tension aux bornes du condensateur.

Le détecteur est inséré dans un sol argileux. Dans ce type de sol, la teneur en eau doit être comprise entre 24 % et 38 % pour qu'une plante puisse y avoir une croissance normale. Le programme renvoie le résultat suivant :

valeur de tau en ms : 0,28676887987

Q10. Déterminer si la teneur en eau mesurée dans ce sol argileux est suffisante pour y assurer une croissance normale d'une plante.

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE**EXERCICE 1**Question **Q1**

Formule de l'indigo

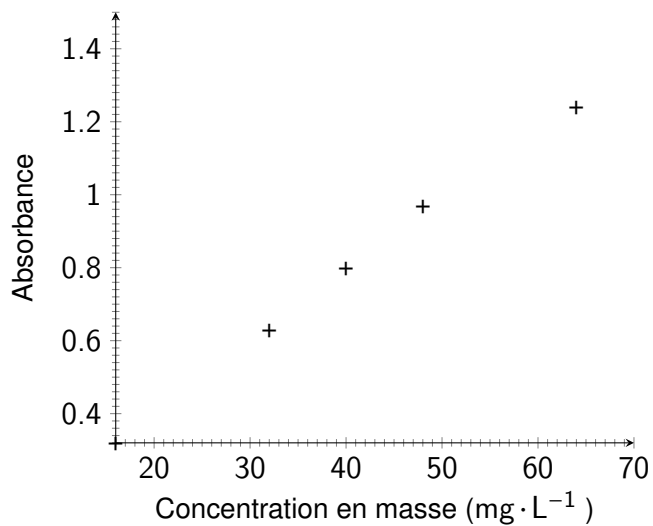
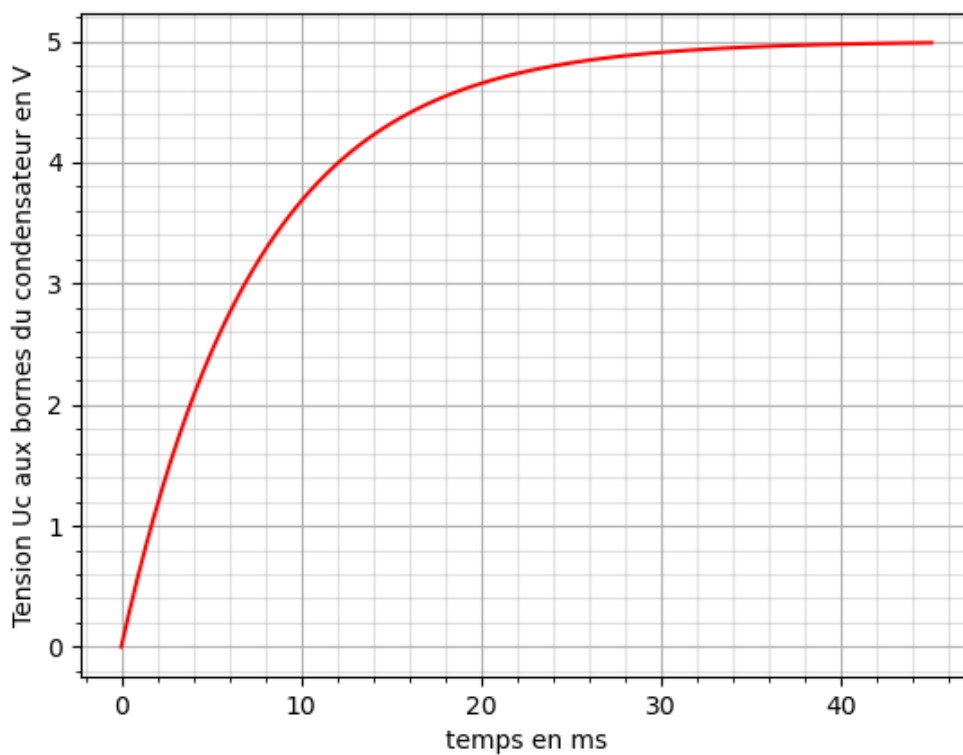
Question **Q16****EXERCICE 3**

FIG. 1 : Evolution de la tension aux bornes du condensateur au cours de la charge

EXERCICE 2

